Örnekler: 1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y}$ diferansiyel denklemini çöz

$$(yy' = x^2)$$

$y \neq 0$ $\quad y\dfrac{dy}{dx} = x^2 \Rightarrow -x^2 + y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c_1$$

$$3y^2 - 2x^3 = c$$

2) $y' + y^2 \sin x = 0$ diferansiyel denk. çözünüz.

$$\frac{dy}{y^2} + \sin x\, dx = 0 \quad (y \neq 0)$$

$$-\frac{1}{y} + (-\cos x) = c$$

$$y = \frac{-1}{c + \cos x}$$

$$y = 0$$

3) $y' = (1-2x)y^2 \quad y(0) = -\dfrac{1}{6}$

Başlangıç değer probleminin çözümünü açık formda bulunuz. Çözümün grafiğini çiziniz ve çözümün tanımlandığı aralığı belirleyiniz.

$$\frac{dy}{dx} = (1-2x)\, y^2$$

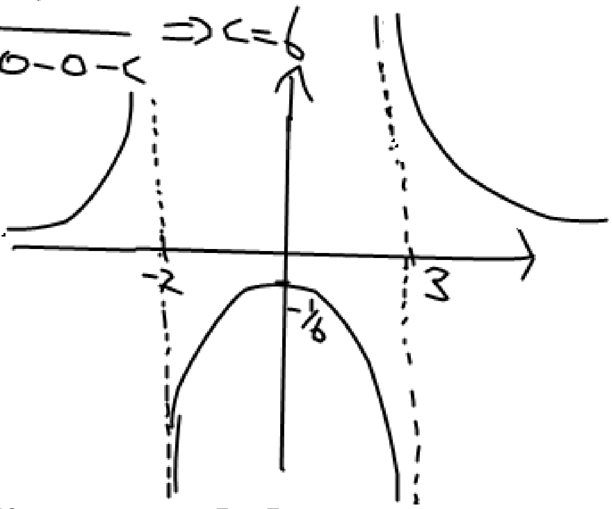
$$\frac{dy}{y^2} = (1-2x)\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = x - x^2 + c$$

$$y = \frac{1}{x^2 - x - c}$$

$$x=0 \quad y = -\frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} = \frac{1}{0-0-c} \Rightarrow c = 6$$

$$y = \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$$



$-2 < x < 3$ çözümün tanımlandığı aralıktır.

4) $y' = \dfrac{x(x^2+1)}{4y^3}$ $\quad y(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ başlangıç değer prob. çöz

$$4y^3\, dy = (x^3 + x)\, dx$$

$$y^4 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$x=0,\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} = c$$

$$y^4 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x^2+1)^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(x^2+1)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2+1}{2}} \qquad y = -\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$$

2.4 Lineer ve Lineer Olmayan Dif. Denklemler Arasındaki Farklar.

Dif. denklem lineer ise genel çözümü formüle etmiştik. Eğer dif. denklem lineer değilse böyle bir formül yoktur.

Lineer denklemler için verilen varlık ve teklik teoreminin benzerini şimdi kanıtsız verelim.

<u>Teorem</u>: f ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları, (t_0, y_0) noktasını içeren $\alpha < t < \beta$, $\gamma < t < \delta$ dikdörtgensel bölgede sürekli olsunlar. Bu durumda $\alpha < t < \beta$ aralığında içerilen bir $t_0 - h < t < t_0 + h$ aralığında, başlangıç değer problemi

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

in, $y = \varphi(t)$ şeklinde tek çözümü vardır.

Bu teorem başlangıç değer probleminin tek çözümünün varlığını kabul eder. Eğer teoremin şartları sağlanmazsa çözümün tekliği sağlanmayabilir.

örnek: $y' = y^{1/3}$ $\quad y(0) = 0 \quad t > 0$ başlangıç değer prob. çözünüz.

$$y^{-1/3}\frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow y^{-1/3}dy = dt \Rightarrow \frac{3}{2}y^{2/3} = t + c \Rightarrow y = \left[\frac{2}{3}(t+c)\right]^{3/2}$$

$$t = 0, \ y = 0 \Rightarrow 0 = c \qquad y = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$$

$y = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ bu da bir çözümdür.

Hatta $y = 0$'da bir çözümdür.

$$f(t, y) = y^{1/3} \text{ sürekli} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3y^{2/3}} \ \underline{\text{Süreksiz}}$$

Tanım Aralığı:

Lineer dif. denklemlerde çözümün tanımlı olduğu aralığı bulmak kolaydır. Fakat lineer olmayan başlangıç değer problemlerinde çözümün var olduğu aralığı saptamak zor olabilir. Lineer olmayan dif. denklemlerde f fonksiyonu ile çözümün var olduğu aralık arasında basit bir ilişki yoktur.

Örnek: $y' = y^2$ $y(0) = 1$ başlangıç değer prob. çözünüz ve çözümün var olduğu aralığı belirleyiniz.

$f(t,y) = y^2$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ sürekli fonksiyonlardır. Teoreme tek bir çözüm vardır.

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = dt \quad -\frac{1}{y} = t + c \quad y = -\frac{1}{t+c}$$

$t=0,\ y=1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$

$$y = \frac{1}{1-t}$$

$t=1$ de y tanımsızdır. Tanım aralığı $-\infty < t < 1$ dir.

Dif. denklemin kendisi 1 noktasında kayda değer birşey olmadığını söylüyor.

Genel Çözüm:

Lineer denklemlerde genel çözüm keyfi bir sabit içermesine ve bütün çözümleri bu sabite özel değerler vererek elde etmemize rağmen lineer olmayan dif. denklemlerde bu böyle değildir. Örneğin $y' = y^2$ dif. denkleminin keyfi sabit içeren çözümü $y = \frac{-1}{t+c}$ dir. bu denklemin bir çözümüde $y=0$ dır. Fakat $y=0$

c'ye değer verilerek elde edilemez.
Bu yüzden genel çözüm terimini yalnız lineer denklemlerde kullanacağız.

Kapalı Çözümler:
Lineer denklemlerde açık çözüm yani $y=\varphi(t)$ şeklinde çözüm bulmamıza rağmen (integrali alınabilenler için) lineer olmayan dif. denklemler de çoğunlukla kapalı çözümler elde ederiz. (örneğin $3y^2-2x^3=c$)

2.8 Tam Dif. Denklemler ve İntegrasyon Çarpanları

Örneğin $2x+y^2+2xyy'=0$ dif. denklemini çözmek istiyelim. Bu denklem ne lineer nede ayrılabilir dif. denklemdir. Bununla beraber

$$\psi(x,y)=x^2+xy^2$$

fonksiyonunun kısmi türevleri

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\psi_x=2x+y^2 \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\psi_y=2xy$$

dır. Dolayısıyla bu dif. denklemi

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,y'=0$$

yani

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy^2)\,\frac{dy}{dx}=0$$

şeklinde yazabiliriz. y'yi x'in fonksiyonu düşünür ve zincir kuralı hatırlanırsa denklem

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy^2)=0$$

denktir. Dolayısıyla $x^2+xy^2=c$ kapalı çözümü elde edilir.

Genel Olarak

$$M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0 \qquad (2.16)$$

dif. denklemi verilsin. Öyle bir ψ fonksiyonu tanımlayalımki

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

olsun ve $\psi(x,y) = c$, x'in diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olarak kapalı şekilde $y = \varphi(x)$'i tanımlasın. Bu durumda

$$M(x,y) + N(x,y)\, y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi(x, \varphi(x))$$

ve buradan (2.16) denklemi

$$\frac{d}{dx}\psi(x, \varphi(x)) = 0$$

formunda olur. (2.16) denkleminin bu durumuna <u>tam diferansiyel denklem</u> denir. (2.16) dif. denkleminin çözümü

$$\psi(x,y) = c$$

dir.